Solve the differential equation $y''-3y'+2y=\sin(e^{-x})$. [94 北科大自動化 2]

[解]特徵方程式 $\lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=1, 2 \Rightarrow y_h=C_1e^x+C_2e^{2x}$

令 $y_p=u_1e^x+u_2e^{2x} \Rightarrow y_p'=(u_1'e^x+u_2'e^{2x})+(u_1e^x+2u_2e^{2x})$

令 $u_1'e^x+u_2'e^{2x}=0$

$y_p''=(u_1'e^x+2u_2'e^{2x})+(u_1e^x+4u_2e^{2x})$

代入原式得

$u_1'e^x+2u_2'e^{2x}=\sin(e^{-x})$

$$\Delta=\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}=e^{3x},\ \Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ \sin(e^{-x}) & 2e^{2x} \end{vmatrix}=-e^{2x}\sin(e^{-x}),\ \Delta_2=\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \sin(e^{-x}) \end{vmatrix}=e^x\sin(e^{-x})$$

$$u_1'=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-e^{-x}\sin(e^{-x}) \Rightarrow u_1=\int -e^{-x}\sin(e^{-x})dx=-\cos(e^{-x})$$

$$u_2'=\frac{\Delta_2}{\Delta}=e^{-2x}\sin(e^{-x}) \Rightarrow u_2=\int e^{-2x}\sin(e^{-x})dx=\int e^{-x}\cdot e^{-x}\sin(e^{-x})dx=\int e^{-x}d\cos(e^{-x})$$

$$=e^{-x}\cos(e^{-x})-\int \cos(e^{-x})de^{-x}=e^{-x}\cos(e^{-x})-\sin(e^{-x})$$

$$y=y_h+y_p=C_1e^x+C_2e^{2x}-e^x\cos(e^{-x})+e^{2x}[e^{-x}\cos(e^{-x})-\sin(e^{-x})]$$

$$=C_1e^x+C_2e^{2x}-e^{2x}\sin(e^{-x})$$