Please find $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=x-y$. [106中興精密9]

[解]微分運算子 $L=\partial_x^2-\partial_y^2=(\partial_x+\partial_y)(\partial_x-\partial_y)=L_1L_2$

其中 $L_1=\partial_x+\partial_y, L_2=\partial_x-\partial_y$

$L_1$ 的特徵方程式為 $\dfrac{dy}{dx}=1\Rightarrow x-y=C$，令 $\xi=x, \eta=x-y$，則

$L_1[u_1]=0\Rightarrow (u_1)_\xi=0\Rightarrow u_1=f(x-y)$

$L_2$ 的特徵方程式為 $\dfrac{dy}{dx}=-1\Rightarrow x+y=C$，令 $\xi=x, \eta=x+y$，則

$L_2[u_2]=0\Rightarrow (u_2)_\xi=0\Rightarrow u_2=g(x+y)$

得齊性解 $u_h=f(x-y)+g(x+y)$

設非齊性解為 $u_p$，則 $L_1L_2[u_p]=x-y$，令 $L_2[u_p]=v\cdots\cdots\cdots$(i)

則 $L_1[v]=x-y\cdots\cdots\cdots$(ii)

令 $\xi=x, \eta=x-y$，(ii) $\Rightarrow v_\xi=\eta\Rightarrow v=\xi\eta=x(x-y)$

代入(i) $\Rightarrow L_2[u_p]=x(x-y)\cdots\cdots\cdots$(iii)

令 $\xi=x, \eta=x+y$，(iii) $\Rightarrow (u_p)_\xi=\xi(2\xi-\eta)$

$$u_p=\frac{2}{3}\xi^3-\frac{1}{2}\xi^2\eta=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2(x+y)$$

解為 $w=u_h+u_p=f(x-y)+g(x+y)+\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2(x+y)$