已知$f(x)=1$，$0<x<\pi$，請完成下列工作，(a)寫出餘弦半幅擴張$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，其中$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx$，$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx$, $n=1, 2, 3,\cdots$；(b)寫出正弦半幅擴張$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$，其中$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx$, $n=1, 2, 3,\cdots$。[104高海輪機七]

[解](a) $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot dx=\frac{2}{\pi}\cdot x\Big|_0^{\pi}=2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot\cos nxdx=\frac{2}{n\pi}\sin nx\Big|_0^{\pi}=0$$

$$f(x)=1$$

(b) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot\sin nxdx=-\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=-\frac{2}{n\pi}(\cos n\pi-1)$$

$$=-\frac{2}{n\pi}[(-1)^n-1]=\frac{4}{(2n-1)\pi}$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$