

試求在點(1, 1, 1)與曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 相垂直之單位向量，並求出曲面在此點之切平面方程式。[97 交大土木丁 11]

[解]令 $\phi = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \nabla\phi = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$

在點 P(1, 1, 1)與曲面垂直的單位向量為

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \Big|_{(1,1,1)} = \pm \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = \pm \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{3}}$$

設過點 P 的切平面上任一點為 X(x, y, z)，則

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PX} = 0 \Rightarrow \pm \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{3}} \cdot [(x-1)\mathbf{i} + (y-1)\mathbf{j} + (z-1)\mathbf{k}] = 0$$

得曲面在 P 的切平面方程式為

$$(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0 \Rightarrow x + y + z = 3$$