

Please find (1) the tangent plane to the surface $z = x^2 + y^2$ at the point $(2, -2, 8)$. (2) the line normal to the surface $z = x^2 + y^2$ at the point $(2, -2, 8)$. [104 雲科大機械 3]

[解](1) 令 $f = x^2 + y^2 - z$

在點 $A(2, -2, 8)$ 切平面的法向量為 $\mathbf{n} = \nabla f|_{(2, -2, 8)} = (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k})|_{(2, -2, 8)} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$

設在點 $A(2, -2, 8)$ 的切平面上任一點為 $X(x, y, z)$ ，則切平面為

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0 \Rightarrow (4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot [(x-2)\mathbf{i} + (y+2)\mathbf{j} + (z-8)\mathbf{k}] = 0 \Rightarrow 4x - 4y - z = 8$$

(2) 設該切平面法線上任一點為 $Y(x, y, z)$ ，則法線為

$$\overrightarrow{AY} // \mathbf{n} \Rightarrow \frac{x-2}{4} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-8}{-1}$$