

空間有三點 $A(2, 5, 7)$, $B(1, 3, 4)$, $C(4, 5, 5)$, (1)以向量方式求解包含此三點之平面方程式。(2)求此三點圍成之三角形面積。[104 高應大機械甲丙 4]

[解] $\overrightarrow{AB} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\overrightarrow{AC} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$

$$(1) \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \Rightarrow \text{平面的法向量為 } \mathbf{n} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

設平面上任一點為 $X(x, y, z)$, 則

$$\mathbf{n} \perp \overrightarrow{AX} = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$$

$$(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot [(x-2)\mathbf{i} + (y-5)\mathbf{j} + (z-7)\mathbf{k}] = 0$$

$$\text{平面方程式為 } (x-2) - 2(y-5) + (z-7) = 0 \Rightarrow x - 2y + z + 1 = 0$$

(2)包含此三點的三角形面積為

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + (-8)^2 + 4^2} = 2\sqrt{6}$$