

若純量場 $\varphi(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - xyz$ 、向量 $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 、點 $P_0(1, -1, -1)$ ，求(1) $\nabla\varphi$ (即 φ 的梯度 (gradient))；(2) $D_{\mathbf{w}}\varphi(P_0)$ (即 φ 在 P_0 沿 $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 方向的方向導數)。[104 聯合電子 7]

[解](1) $\nabla\varphi = (-2x - yz)\mathbf{i} + (-2y - xz)\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$

$$(2)\nabla\varphi|_{(1, -1, -1)} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$D_{\mathbf{w}}\varphi(P_0) = \nabla\varphi|_{(1, -1, -1)} \cdot \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = (-3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$