Solve the system as the following $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ x_2' = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = x_1 + 3x_2 - x_3 \end{cases}$, $x_1(0)=1$, $x_2(0)=0$, $x_3(0)=1/2$. [98 彰師大車輛 5]

[解]原式為 $\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ \dfrac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax} \cdots\cdots\cdots \text{(i)}$，其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 1, -2, 3$$

$$\lambda = 1, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -2, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 3, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{S}^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{bmatrix} 15 & -25 & 10 \\ 0 & -2 & 2 \\ -15 & -3 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\text{令}\mathbf{x} = \mathbf{Sy}, \text{(i)} \Rightarrow \mathbf{S}\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{ASy} \Rightarrow \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{ASy} \Rightarrow \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Dy} \Rightarrow \mathbf{y} = e^{\mathbf{D}t}\mathbf{c}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^t & 11e^{-2t} & e^{3t} \\ e^t & e^{-2t} & e^{3t} \\ e^t & -14e^{-2t} & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$t = 0: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/30 \\ 7/10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -e^t & 11e^{-2t} & e^{3t} \\ e^t & e^{-2t} & e^{3t} \\ e^t & -14e^{-2t} & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/30 \\ -21/30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^t/3 - 11e^{-2t}/30 + 7e^{3t}/10 \\ -2e^t/3 - e^{-2t}/30 + 7e^{3t}/10 \\ -2e^t/3 + 7e^{-2t}/15 + 7e^{3t}/10 \end{bmatrix}$$