

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ (1) 求 } \mathbf{A} \text{ 的特徵值及特徵向量; (2) 求 } e^{\mathbf{A}}. \text{ [106 南台月考題 4]}$$

$$\text{[解](1) } |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 12\lambda - 16 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)(\lambda + 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 4, -2, -2$$

$$\lambda = 4 \text{ 時, } \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 1:1:1$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -2 \text{ 時, } \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0, \text{ 令 } x_3 = C_1, x_2 = C_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1 - C_2 \\ C_2 \\ C_1 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{S} e^{\mathbf{D}} \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^4 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -e^4 - 2e^{-2} & -e^4 + e^{-2} & -e^4 + e^{-2} \\ -e^4 + e^{-2} & -e^4 - 2e^{-2} & -e^4 + e^{-2} \\ -e^4 + e^{-2} & -e^4 + e^{-2} & -e^4 - 2e^{-2} \end{bmatrix}$$