Find the particular solution of the following differential equation:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y+3e^{3t}\\ \dfrac{dy}{dt}=x+2y\end{cases}$$ which satisfies the initial condition $\begin{cases}x(0)=5\\ y(0)=3\end{cases}$. [104 文化化材 4]

[解]令 $\mathbf{z}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}, \mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}, \mathbf{h}=\begin{bmatrix}3e^{3t}\\0\end{bmatrix}$，原式為$\mathbf{z}'=\mathbf{A}\mathbf{z}+\mathbf{h}$

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda^2-4\lambda+3=0\Rightarrow\lambda=1,3$$

$\lambda=1$時, $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\mathbf{x}_1=0\Rightarrow\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$，$\lambda=3$時, $\begin{bmatrix}-1&3\\1&-1\end{bmatrix}\mathbf{x}_2=0\Rightarrow\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

得 $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}, \mathbf{S}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{S}^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$

令 $\mathbf{z}=\mathbf{S}\mathbf{w}\Rightarrow\mathbf{z}'=\mathbf{S}\mathbf{w}'\Rightarrow\mathbf{w}'=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{z}'\Rightarrow\mathbf{w}'=\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{w}+\mathbf{h})\Rightarrow\mathbf{w}'=\mathbf{D}\mathbf{w}+\mathbf{S}^{-1}\mathbf{h}$

$$\mathbf{w}=e^{\mathbf{D}t}[\int e^{-\mathbf{D}t}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{h}dt+\mathbf{c}]=\begin{bmatrix}e^t&0\\0&e^{3t}\end{bmatrix}\left[\int\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{-t}&0\\0&e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3e^{3t}\\0\end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^t&0\\0&e^{3t}\end{bmatrix}\left[\int\begin{bmatrix}e^{-t}&-e^{-t}\\e^{-3t}&e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3e^{3t}\\0\end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^t&0\\0&e^{3t}\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}\frac{3}{2}e^{2t}\\3t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}c_1e^t+\frac{3}{2}e^{3t}\\c_2e^{3t}+3te^{3t}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}=\mathbf{S}\mathbf{w}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1e^t+\frac{3}{2}e^{3t}\\c_2e^{3t}+3te^{3t}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}c_1e^t+c_2e^{3t}+\frac{3}{2}e^{3t}+3te^{3t}\\-c_1e^t+c_2e^{3t}+3te^{3t}-\frac{3}{2}e^{3t}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}(0)=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{1}{2}\begin{bmatrix}c_1+c_2+\frac{3}{2}\\-c_1+c_2-\frac{3}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}e^t+2e^{3t}+\frac{3}{4}e^{3t}+\frac{3}{2}te^{3t}\\\frac{1}{4}e^t+2e^{3t}+\frac{3}{2}te^{3t}-\frac{3}{4}e^{3t}\end{bmatrix}$$