Find a matrix $\mathbf{S}$ such thst $\mathbf{S}^2 = \mathbf{A}$ if $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$. [104 中正通訊甲 4]

[解] $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-9) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 4, 9$

$$\lambda = 1, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 4, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 9, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -8 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

得 $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\mathbf{S} = \sqrt{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\sqrt[3]{\mathbf{D}}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 2 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 3 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 共有8個解，僅列其中3解

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$