Let $[\mathbf{A}]=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$ be a matrix.

(a)Determine the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of $[\mathbf{A}]$.

(b)Find the general solution of the linear ODE system $\begin{bmatrix}y_1'\\ y_2'\end{bmatrix}=[\mathbf{A}]\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$.

(c)Find the nonhomogeneous linear ODE system $\begin{bmatrix}y_1'\\ y_2'\end{bmatrix}=[\mathbf{A}]\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6\\ 2\end{bmatrix}e^{-2t}$, $y_1(1)=-4e^{-2}$, $y_2(1)$ $=0$. [103 清大核工工科 3]

[解](a)$\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1\\ 1 & -3-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda^2+6\lambda+8=0\Rightarrow\lambda=-2,-4$

$\lambda=-2$時, $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\mathbf{x}_1=0\Rightarrow\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$, $\lambda=-4$時, $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}_2=0\Rightarrow\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$

(b)令 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$, $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$, 原式為$\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}, \mathbf{S}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{S}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

令 $\mathbf{x}=\mathbf{S}\mathbf{z}\Rightarrow\mathbf{x}'=\mathbf{S}\mathbf{z}'\Rightarrow\mathbf{z}'=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}'\Rightarrow\mathbf{z}'=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{z}'=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{z}\Rightarrow\mathbf{z}'=\mathbf{D}\mathbf{z}$

$$\mathbf{x}=\mathbf{S}\mathbf{z}=\mathbf{S}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{c}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-2t} & 0\\ 0 & e^{-4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1e^{-2t}-c_2e^{-4t}\\ c_1e^{-2t}+c_2e^{-4t}\end{bmatrix}$$

(c)令 $\mathbf{h}=\begin{bmatrix}-6e^{-2t}\\ 2e^{-2t}\end{bmatrix}$

$$\mathbf{x}=\mathbf{S}\mathbf{z}\Rightarrow\mathbf{x}'=\mathbf{S}\mathbf{z}'\Rightarrow\mathbf{z}'=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}'\Rightarrow\mathbf{z}'=\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{h})\Rightarrow\mathbf{z}'=\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{z}+\mathbf{h})=\mathbf{D}\mathbf{z}+\mathbf{S}^{-1}\mathbf{h}$$

$$\mathbf{z}=e^{\mathbf{D}t}[\int e^{-\mathbf{D}t}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{h}dt+\mathbf{c}]=\begin{bmatrix}e^{-2t} & 0\\ 0 & e^{-4t}\end{bmatrix}\left[\int\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{2t} & 0\\ 0 & e^{4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6e^{-2t}\\ 2e^{-2t}\end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{-2t} & 0\\ 0 & e^{-4t}\end{bmatrix}\left[\int\begin{bmatrix}e^{2t} & e^{2t}\\ -e^{4t} & e^{4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6e^{-2t}\\ 2e^{-2t}\end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{-2t} & 0\\ 0 & e^{-4t}\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}-4t\\ 4e^{2t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}c_1e^{-2t}-4te^{-2t}\\ c_2e^{-4t}+4e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{S}\mathbf{z}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1e^{-2t}-4te^{-2t}\\ c_2e^{-4t}+4e^{-2t}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}c_1e^{-2t}-c_2e^{-4t}-4te^{-2t}-4e^{-2t}\\ c_1e^{-2t}+c_2e^{-4t}-4te^{-2t}+4e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(1)=\begin{bmatrix}-4e^{-2}\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{1}{2}\begin{bmatrix}c_1e^{-2}-c_2e^{-4}-8e^{-2}\\ c_1e^{-2}+c_2e^{-4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4e^{-2}\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2te^{-2t}-2e^{-2t}\\ -2te^{-2t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$