Find a matrix $\mathbf{A}$, such that $\mathbf{A}^2-4\mathbf{A}+4\mathbf{I}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix}$, where $\mathbf{I}$ is the identity matrix. [103 北科大電子乙 5]

[解]令$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix}\Rightarrow|\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}4-\lambda & 3\\ 5 & 6-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda^2-10\lambda+9=0\Rightarrow\lambda=1,9$

$\lambda=1,\ \mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix},\ \lambda=9,\ \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix},\ \mathbf{S}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 5\end{bmatrix},\ \mathbf{S}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}5 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}$

$\because \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}=\mathbf{D},\ \therefore \mathbf{B}=\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$

因為 $\mathbf{A}$ 與 $\mathbf{B}$ 有相同的特徵向量，因此 $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}=\mathbf{Y}\Rightarrow\mathbf{A}=\mathbf{S}\mathbf{Y}\mathbf{S}^{-1}$，其中 $\mathbf{Y}$ 為 $\mathbf{A}$ 的對角矩陣，原式為

$(\mathbf{SYS}^{-1})(\mathbf{SYS}^{-1})-4(\mathbf{SYS}^{-1})+4\mathbf{I}=\mathbf{B}\Rightarrow\mathbf{SY}^2\mathbf{S}^{-1}-4\mathbf{SYS}^{-1}+4\mathbf{I}=\mathbf{B}$

$\mathbf{S}(\mathbf{Y}^2-4\mathbf{Y}+4\mathbf{I})\mathbf{S}^{-1}=\mathbf{B}\Rightarrow\mathbf{S}(\mathbf{Y}^2-4\mathbf{Y}+4\mathbf{I})\mathbf{S}^{-1}=\mathbf{SDS}^{-1}\Rightarrow\mathbf{Y}^2-4\mathbf{Y}+4\mathbf{I}=\mathbf{D}$

將它展開得

$$\begin{bmatrix}y_1^2-4y_1+4 & 0\\ 0 & y_2^2-4y_2+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}\Rightarrow y_1=1,3,\text{ and } y_2=-1,5$$

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{SYS}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -3\\ -5 & -1\end{bmatrix},\frac{1}{4}\begin{bmatrix}15 & 3\\ 5 & 17\end{bmatrix}.$$