Solve $x^2y''-xy'-24y=0, y(1)=15, y'(1)=0$. [97 宜蘭生物機電 2]

[解]令 $x=e^t \Rightarrow t=\ln x$ 原式為

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}-1\right)y-\frac{dy}{dt}-12y=0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}-24y=0 \cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

特徵方程式 $\lambda^2-2\lambda-24=0 \Rightarrow (\lambda+4)(\lambda-6)=0 \Rightarrow \lambda=-4, 6$

$y=C_1e^{-4x}+C_2e^{6x} \Rightarrow y'=-4C_1e^{-4x}+6C_2e^{6x}$

$y(1)=15 \Rightarrow C_1e^{-4}+C_2e^{6}=15$

$y'(1)=0 \Rightarrow -4C_1e^{-4}+6C_2e^{6}=0$

$$C_1=\frac{\begin{vmatrix}15 & e^6\\ 0 & 6e^6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{-4} & e^6\\ -4e^{-4} & 6e^6\end{vmatrix}}=\frac{90e^6}{10e^2}=9e^4,\ C_2=\frac{\begin{vmatrix}e^{-4} & 15\\ -4e^{-4} & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{-4} & e^6\\ -4e^{-4} & 6e^6\end{vmatrix}}=\frac{60e^{-4}}{10e^2}=6e^{-6}$$

$y=9e^4e^{-4x}+6e^{-6}e^{6x}$