求微分方程式$\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}+2y=xe^x$之通解。[93 中山機電 6]

[解]特徵方程式$\lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)=0 \Rightarrow \lambda=1, 2 \Rightarrow y_h=C_1e^x+C_2e^{2x}$

令 $y_p=(Ax^2+Bx)e^x \Rightarrow y_p'=[Ax^2+(2A+B)x+B]e^x$

$y_p''=[Ax^2+(4A+B)x+(2A+2B)]e^x$

代入原式

$[Ax^2+(4A+B)x+(2A+2B)]e^x-3[Ax^2+(2A+B)x+B]e^x+2(Ax^2+Bx)e^x=xe^x$

$[-2Ax+(2A-B)]e^x=xe^x \Rightarrow A=-\dfrac{1}{2}, B=-1$

$y=y_h+y_p=C_1e^x+C_2e^{2x}-(\dfrac{1}{2}x^2+x)e^x$