$y''+4y=\csc 2x$. [106 南台車輛期末考 1]

[解]特徵方程式 $\lambda^2+4=0\Rightarrow\lambda=\pm 2i\Rightarrow y_h=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

令 $y_p=u_1\cos 2x+u_2\sin 2x\Rightarrow y_p'=(u_1'\cos 2x+u_2'\sin 2x)+(-2u_1\sin 2x+2u_2\cos 2x)$

令 $u_1'\cos 2x+u_2'\sin 2x=0$

$y_p''=(-2u_1'\sin 2x+2u_2'\cos 2x)+(-4u_1\cos 2x-4u_2\sin 2x)$

代入原式得

$-2u_1'\sin 2x+2u_2'\cos 2x=\csc 2x$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos 2x & \sin 2x\\ -2\sin 2x & 2\cos 2x\end{vmatrix}=2,\ \Delta_1=\begin{vmatrix}0 & \sin 2x\\ \csc 2x & 2\cos 2x\end{vmatrix}=-1,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}\cos 2x & 0\\ -2\sin 2x & \csc 2x\end{vmatrix}=\cot 2x$$

$$u_1'=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{1}{2}\Rightarrow u_1=\frac{-x}{2}$$

$$u_2'=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{\cot 2x}{2}\Rightarrow u_2=\int\frac{\cot 2x}{2}dx=\frac{1}{4}\ln|\sin 2x|$$

$$y=y_h+y_p=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\ln|\sin 2x|$$