試求解微分方程式 $2t\frac{dy}{dt}-y=2y^2$；$y(1)=-1$，其中 $y=y(t)$。[105 海洋造船 3]

[解]原式 $\Rightarrow y^{-2}\frac{dy}{dt}-\frac{1}{2t}y^{-1}=\frac{1}{t}$……(i)

令 $u=y^{-1}\Rightarrow\frac{du}{dt}=-y^{-2}\frac{dy}{dt}$

(i) $\Rightarrow -\frac{du}{dt}-\frac{1}{2t}u=\frac{1}{t}\Rightarrow\frac{du}{dt}+\frac{1}{2t}u=-\frac{1}{t}$

$F=e^{\int\frac{1}{2t}dt}=e^{\frac{1}{2}\ln t}=t^{\frac{1}{2}}$

$u=\frac{1}{F}[\int F\cdot(-\frac{1}{t})dt+C]=t^{-\frac{1}{2}}[\int t^{\frac{1}{2}}\cdot(-\frac{1}{t})dt+C]=t^{-\frac{1}{2}}[(-2t^{\frac{1}{2}})+C]=Ct^{-\frac{1}{2}}-2$

$y=\frac{1}{Ct^{-\frac{1}{2}}-2}$