$y''+y=\tan x$. [104 高應大機械甲丙 1]

[解]$\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda=\pm i \Rightarrow y_h(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$

令 $y_p(x)=u_1\cos x+u_2\sin x \Rightarrow y_p'=(-u_1\sin x+u_2\cos x)+(u_1'\cos x+u_2'\sin x)$

令 $u_1'\cos x+u_2'\sin x=0\cdots\cdots\cdots\cdots$(i)

$y_p''=(-u_1\cos x-u_2\sin x)+(-u_1'\sin x+u_2'\cos x)$，代入原式

$[(-u_1\cos x-u_2\sin x)+(-u_1'\sin x+u_2'\cos x)]+(u_1\cos x+u_2\sin x)=\tan x$

$-u_1'\sin x+u_2'\cos x=\tan x\cdots\cdots\cdots\cdots$(ii)

由(i)與(ii)得

$$u_1'=\frac{\begin{vmatrix}0 & \sin x\\ \tan x & \cos x\end{vmatrix}}{W(\cos x,\sin x)}=-\sin x\tan x$$

$$u_1=\int -\sin x\tan x\,dx=\int \tan x\,d\cos x=\cos x\tan x-\int \cos x\sec^2 x\,dx=\sin x-\ln|\sec x+\tan x|$$

$$u_2'=\frac{\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & \tan x\end{vmatrix}}{W(\cos x,\sin x)}=\sin x \Rightarrow u_2=\int \sin x\,dx=-\cos x$$

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+(\sin x-\ln|\sec x+\tan x|)\cos x+(-\cos x)\sin x$$

$$=(C_1-\ln|\sec x+\tan x|)\cos x+C_2\sin x$$