Solve the ordinary differential equation $y''-y'-12y=2\sinh^2 x$. [101 台科大自控 1(2)]

[解]原式 $\Rightarrow y''-y'-12y=2(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2})^2 \Rightarrow y''-y'-12y=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}-1$ ………(i)

特徵方程式 $\lambda^2-\lambda-12=0 \Rightarrow (\lambda+3)(\lambda-4)=0 \Rightarrow \lambda=-3, 4$

$y_h(x)=C_1e^{-3x}+C_2e^{4x}$

令 $y_p(x)=A+Be^{2x}+Ce^{-2x} \Rightarrow y_p'=2Be^{2x}-2Ce^{-2x} \Rightarrow y_p''=4Be^{2x}+4Ce^{-2x}$

代入(i)式得

$$(4Be^{2x}+4Ce^{-2x})-(2Be^{2x}-2Ce^{-2x})-12(A+Be^{2x}+Ce^{-2x})=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}-1$$

$$-10Be^{2x}-6Ce^{-2x}-12A=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}-1 \Rightarrow A=\frac{1}{12}, B=-\frac{1}{20}, C=-\frac{1}{12}$$

解為 $y(x)=y_h(x)+y_p(x)=C_1e^{-3x}+C_2e^{4x}+\frac{1}{12}-\frac{1}{20}e^{2x}-\frac{1}{12}e^{-2x}$