

Solve the differential equation  $4y'' + 36y = \csc 3x$ . [101 台科大材料乙 5(1)]

[解] 特徵方程式  $4\lambda^2 + 36 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 3i \Rightarrow y_h = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

$$\text{令 } y_p = u_1 \cos 3x + u_2 \sin 3x \Rightarrow y'_p = (u'_1 \cos 3x + u'_2 \sin 3x) + (-3u_1 \sin 3x + 3u_2 \cos 3x)$$

$$\text{令 } u'_1 \cos 3x + u'_2 \sin 3x = 0 \cdots \cdots \cdots \text{(i)} \Rightarrow y'_p = -3u_1 \sin 3x + 3u_2 \cos 3x$$

$$y''_p = (-3u'_1 \sin 3x + 3u'_2 \cos 3x) + (-9u_1 \cos 3x - 9u_2 \sin 3x)$$

$$\text{代入原式} \Rightarrow 4[(-3u'_1 \sin 3x + 3u'_2 \cos 3x) + (-9u_1 \cos 3x - 9u_2 \sin 3x)]$$

$$+ 36(u_1 \cos 3x + u_2 \sin 3x) = \csc 3x$$

$$-12u'_1 \sin 3x + 12u'_2 \cos 3x = \csc 3x \cdots \cdots \cdots \text{(ii)}$$

$$\text{由 (i), (ii) 得 } u'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin 3x \\ \csc 3x & -12 \cos 3x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -12 \sin 3x & 12 \cos 3x \end{vmatrix}} = \frac{-1}{12} \Rightarrow u_1 = -\frac{x}{12}$$

$$u'_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -12 \sin 3x & \csc 3x \end{vmatrix}}{12} = \frac{\cos 3x \cdot \csc 3x}{12} = \frac{\cot 3x}{12} \Rightarrow u_2 = -\frac{1}{36} \ln |\csc 3x|$$

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{x}{12} \cos 3x - \frac{1}{36} \sin 3x \ln |\csc 3x|$$