If $f(t)=\begin{cases}2, & -2\le t<-1\\ 1, & -1\le t<1\\ 2, & 1\le t<2\end{cases}$, (a) find the Fourier series of $f(t)$, (b) find the value of the Fourier series, found in (a), converges to, when t is an integer, (c) find the steady state solution of the O.D.E.: $y''+25y=f(t)$, where $y''=d^2y/dt^2$. [98 成大機械 5]

[解](a) $f(t)$為偶函數，其Fourier級數為 $f(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{n\pi t}{2}$, 其中

$$a_0=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^1 1dt+\int_1^2 2dt=t\Big|_0^1+2t\Big|_1^2=3$$

$$a_n=\int_0^2 f(t)\cos\frac{n\pi t}{2}dt=\int_0^1 1\cos\frac{n\pi t}{2}dt+\int_1^2 2\cos\frac{n\pi t}{2}dt$$

$$=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi t}{2}\Big|_0^1+\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi t}{2}\Big|_1^2=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{2(-1)^n}{(2n-1)\pi}$$

$$f(t)=\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2}$$

(b) $t=-2$: 級數值 $\dfrac{f(-2^-)+f(-2^+)}{2}=\dfrac{2+2}{2}=2$, $t=-1$: 級數值 $\dfrac{f(-1^-)+f(-1^+)}{2}=\dfrac{2+1}{2}=\dfrac{3}{2}$

$t=0$: 級數值 $\dfrac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\dfrac{1+1}{2}=1$, $t=1$: 級數值 $\dfrac{f(1^-)+f(1^+)}{2}=\dfrac{1+2}{2}=\dfrac{3}{2}$

$f(t+4)=f(t)$

(c) $y''+25y=f(t)$的齊性解為 $y_h=C_1\cos 5t+C_2\sin 5t$

令 $y_p=A\cos\dfrac{(2n-1)\pi t}{2}+B\sin\dfrac{(2n-1)\pi t}{2}+C$

$$y_p'=\frac{(2n-1)\pi}{2}\left[-A\sin\frac{(2n-1)\pi t}{2}+B\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2}\right]$$

$$y_p''=\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}\left[-A\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2}-B\sin\frac{(2n-1)\pi t}{2}\right]$$

代入方程式 $\Rightarrow \dfrac{(2n-1)^2\pi^2}{4}\left[-A\cos\dfrac{(2n-1)\pi t}{2}-B\sin\dfrac{(2n-1)\pi t}{2}\right]$

$$+25\left[A\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2}+B\sin\frac{(2n-1)\pi t}{2}+C\right]=\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2}$$

$$25-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}A=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{2n-1},\ B=0,\ 25C=\frac{3}{2}$$

$$A=\frac{8(-1)^n}{\pi(2n-1)[100-(2n-1)^2\pi^2]},\ B=0,\ C=\frac{3}{50}$$

$$y=y_h+y_p=C_1\cos 5t+C_2\sin 5t+\frac{3}{50}+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)[100-(2n-1)^2\pi^2]}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2}$$