

Find the Fourier transform of the function $f(x) = x e^{-x^2}$. [105 中山光電 5]

$$\begin{aligned} \text{[解]} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x^2+i\omega x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\left(x+\frac{i\omega}{2}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4}} dx = e^{-\frac{\omega^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\left(x+\frac{i\omega}{2}\right)^2} dx \\ &= e^{-\frac{\omega^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(x+\frac{i\omega}{2}\right) - \frac{i\omega}{2} \right] e^{-\left(x+\frac{i\omega}{2}\right)^2} dx \\ &= e^{-\frac{\omega^2}{4}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(x+\frac{i\omega}{2}\right) e^{-\left(x+\frac{i\omega}{2}\right)^2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\omega}{2} e^{-\left(x+\frac{i\omega}{2}\right)^2} dx \right] \\ &= e^{-\frac{\omega^2}{4}} \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x+\frac{i\omega}{2}\right)^2} d\left(x+\frac{i\omega}{2}\right)^2 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\omega}{2} e^{-\left(x+\frac{i\omega}{2}\right)^2} d\left(x+\frac{i\omega}{2}\right) \right] \\ &= e^{-\frac{\omega^2}{4}} \left[-\frac{1}{2} e^{-\left(x+\frac{i\omega}{2}\right)^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\omega}{2} \sqrt{\pi} \right] = -\frac{i\omega}{2} \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \end{aligned}$$