已知週期函數 $f(t)=\begin{cases}0, & -\pi<t<-\dfrac{\pi}{2}\\ \pi, & -\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<t<\pi\end{cases}$, $f(t)=f(t+2\pi)$，試求其傅立葉級數，並利用此結果證明等式 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$。[104 屏科大車輛 7]

[解] $f(t)$ 為偶函數 $\Rightarrow$ 設 $f(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi dt=2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\cos nt dt=\frac{2}{n}\cdot\sin nt\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{n}\cdot\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

$$\therefore\ f(t)=\frac{\pi}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos nt$$

$t=0$ 代入 $\Rightarrow \dfrac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\dfrac{\pi}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\Rightarrow\dfrac{\pi+\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\Rightarrow\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$