求下列函數的傅立葉轉換(a)$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<a \\ 0, & |x|>a\end{cases}$，其中 a 為常數；(b)$f(x)=\begin{cases}e^{-2x}, & x>0 \\ e^{5x}, & x<0\end{cases}$ [102 虎尾光電 3]

[解](a)$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-a}^{a} 1\cdot e^{-i\omega x}dx=\dfrac{1}{-i\omega}\cdot e^{-i\omega x}\Big|_{-a}^{a}=\dfrac{1}{-i\omega}(e^{-i\omega a}-e^{i\omega a})$

$$=\frac{1}{-i\omega}(-2i\sin a\omega)=\frac{2\sin a\omega}{\omega}$$

(b)$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{0} e^{5x}\cdot e^{-i\omega x}dx+\int_{0}^{\infty} e^{-2x}\cdot e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{0} e^{(5-i\omega)x}dx+\int_{0}^{\infty} e^{-(2+i\omega)x}dx$

$$=\frac{e^{(5-i\omega)x}}{5-i\omega}\Bigg|_{-\infty}^{0}-\frac{e^{-(2+i\omega)x}}{2+i\omega}\Bigg|_{0}^{\infty}=(\frac{1}{5-i\omega}-0)-(0-\frac{1}{2+i\omega})=\frac{1}{5-i\omega}+\frac{1}{2+i\omega}$$

$$=\frac{5+i\omega}{25+\omega^2}+\frac{2-i\omega}{4+\omega^2}=\frac{70+7\omega^2-21i\omega}{(25+\omega^2)(4+\omega^2)}$$