

求下列函數的傅立葉轉換(a) $f(x)=\begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$ ，其中 a 為常數；(b) $f(x)=\begin{cases} e^{-2x}, & x > 0 \\ e^{5x}, & x < 0 \end{cases}$ [102]

虎尾光電 3]

$$[\text{解}](a) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx = \int_{-a}^a 1 \cdot e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{-i\omega} \cdot e^{-i\omega x} \Big|_{-a}^a = \frac{1}{-i\omega} (e^{-i\omega a} - e^{i\omega a})$$

$$= \frac{1}{-i\omega} (-2i \sin a\omega) = \frac{2 \sin a\omega}{\omega}$$

$$(b) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^0 e^{5x} \cdot e^{-i\omega x} dx + \int_0^{\infty} e^{-2x} \cdot e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^0 e^{(5-i\omega)x} dx + \int_0^{\infty} e^{-(2+i\omega)x} dx$$

$$= \frac{e^{(5-i\omega)x}}{5-i\omega} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{e^{-(2+i\omega)x}}{2+i\omega} \Big|_0^{\infty} = \left(\frac{1}{5-i\omega} - 0 \right) - \left(0 - \frac{1}{2+i\omega} \right) = \frac{1}{5-i\omega} + \frac{1}{2+i\omega}$$

$$= \frac{5+i\omega}{25+\omega^2} + \frac{2-i\omega}{4+\omega^2} = \frac{70+7\omega^2-2i\omega}{(25+\omega^2)(4+\omega^2)}$$