

Evaluate $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. [93 中正機械 9]

[解] 令 $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$

$f(z)$ 有單極點在 $z = 0$ ，恰在積分路徑上，使用避點圍線

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx - \pi i \cdot R_0 + \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + 0 = 0$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{x} dx - \pi i \cdot \frac{e^{i \cdot 0}}{1} + \int_0^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx + 0 = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{x} dx = \pi i$$

得實部 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0$, 虛部 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$

