Evaluate the integral $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+a\cos x}$ with aid of residues, where $-1<a<1$. [90 中正機械 5(b)]

[解]令 $z=e^{ix} \Rightarrow \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{(e^{ix})^2+1}{2e^{ix}}=\frac{z^2+1}{2z}$, $dz=ie^{ix}dx=izdx \Rightarrow dx=\frac{dz}{iz}$

$$\frac{dx}{1+a\cos x}=\frac{\frac{dz}{iz}}{1+a\cdot\frac{z^2+1}{2z}}=\frac{-2idz}{az^2+2z+a} \Rightarrow \text{令 } f(z)=\frac{-2idz}{az^2+2z+a}$$

$f(z)$在 $z=\frac{-1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}$有單極點，其中只有 $z_1=\frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}$在單位圓內

$$\text{Res}[f(z);z_1]=\left.\frac{-2i}{2az+2}\right|_{z=z_1}=\frac{-2i}{2a\cdot\frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}+2}=\frac{-2i}{2\sqrt{1-a^2}}=\frac{-i}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+a\cos x}=2\pi i\left(\frac{-i}{\sqrt{1-a^2}}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$