

若力場 $\mathbf{F}=2y\mathbf{i}-x\mathbf{j}$ 且圓 C 的圓心為 $(1, 3)$ ，半徑為 2 ，計算以力場 $\mathbf{F}$ 推動一粒子沿圓 C 正位向繞一圈所做的功 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 。[104 聯合電子 8(b)]

[解]圓的參數式為 $x=1+2\cos t, y=3+2\sin t$ ，因此

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}=(1+2\cos t)\mathbf{i}+(3+2\sin t)\mathbf{j} \Rightarrow d\mathbf{r}=(-2\sin t\mathbf{i}+2\cos t\mathbf{j})dt$$

$$\mathbf{F}=2y\mathbf{i}-x\mathbf{j}=2(3+2\sin t)\mathbf{i}-(1+2\cos t)\mathbf{j}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} [2(3+2\sin t)\mathbf{i}-(1+2\cos t)\mathbf{j}] \cdot (-2\sin t\mathbf{i}+2\cos t\mathbf{j})dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-12\sin t - 8\sin^2 t - 2\cos t - 4\cos^2 t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-12\sin t - 4\sin^2 t - 2\cos t - 4)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [-12\sin t - 4 \cdot \frac{1-\cos 2t}{2} - 2\cos t - 4]dt$$

$$= [12\cos t - (2t - \sin 2t) - 2\sin t - 4t]_0^{2\pi} = -12\pi$$